(scritto del 3 luglio 2013)

\[ A^3 \quad \text{Punti:} \quad A = (0, 1, -2) \]
\[ B = (3, 2, 2) \]

\[ \text{Retta:} \quad r : \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \]

(a) Determinare il punto \( A' \), proiezione ortogonale di \( A \) sulla retta \( r \).

\[ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \] \( \text{è un punto} \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in r \)

\[ \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \] \( \text{è un punto} \quad Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in r \)
\[ \mathbf{v}_\pi = \mathbf{Q} - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \] è un vettore direttore della retta \( \pi \).

\[ \mathbf{r} : \mathbf{X} = \mathbf{P} + \lambda \mathbf{v}_\pi \quad (\Rightarrow) \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = -1 + 0 \end{cases} \]

sono le coordinate di un generico p.t.o. della retta \( \pi \).

\[ \mathbf{w} = \mathbf{X} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda \\ \lambda - 1 \\ -1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda \\ \lambda - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \]

\[ \mathbf{v}_\pi \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3(1 - 3\lambda) + 1(\lambda - 1) + 0 = 0 \]

\[-3 + 9\lambda + \lambda - 1 = 0 \]

\[ 10\lambda = 4 , \quad \lambda = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \]

Si trova \( \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \end{pmatrix} \)

Un altro modo è il seguente:

Lezione 44 Pagina 2
$\vec{u}_n = (-3, 1, 0)$

$A = (0, 1, -2)$

Il piano $\pi$, piano **perpendicolare** alla retta $r$, passante per $A$.

$A' = \pi \cap r$

$\vec{u}_n$ è un vettore **perpendicolare** al piano $\pi$, quindi l'equazione del piano $\pi$ è:

$$\pi : -3x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + d = 0$$

Dato che $A \in \pi$, sostituisco le coord. di $A$:

$$-3 \cdot 0 + 1 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = -1$$

Quindi l'eq. del piano $\pi$ è:

$$\pi : -3x + y - 1 = 0$$

A': $egin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \\ -3x + y - 1 = 0 \end{cases}$

risolvendo si trova il punto $A'$. 
(b) Trovare l'eq. cartesiana del piano \( \sigma \) tale che la proiezione ortogonale di \( A \) su \( \sigma \) sia il pto \( B \) assegnato.

\[
A = (0, 1, -2) \quad \Rightarrow \quad B - A = (3, 1, 4) \quad \text{è un vettore perpendicolare al piano \( \sigma \).}
\]

\[
\Rightarrow \quad \sigma : 3x + y + 4z + d = 0
\]

Il termine noto \( d \) viene calcolato imponendo la condizione di passaggio per il punto \( B \):

\[
g + 2 + 8 + d = 0
\]

\[
\Rightarrow \quad d = -19
\]

\[
\Rightarrow \quad \sigma : 3x + y + 4z - 19 = 0
\]
(c) Fra le rette passanti per $A$ e coplanari alla retta $r$ si determini quella che ha distanza minima dal pto $B$.

L'insieme di tutte le rette passanti per $A$ e coplanari alla retta $r$ forma un piano $\pi'$, che contiene la retta $r$ e il punto $A$.

$$
\pi' \colon \begin{cases} 
x + 3y - 1 = 0 \\
2 + 1 = 0
\end{cases}
$$

L'eq. del fascio di piani di asse $r$ è:

$$
\lambda (x + 3y - 1) + \mu (2 + 1) = 0
$$

Impondo la condizione di passaggio per $A = (0, 1, -2)$

$$
\lambda (2) + \mu (-1) = 0
$$
\[2\lambda - \mu = 0\quad \Rightarrow\quad \mu = 2\lambda\]

Quindi \(\lambda = 1,\quad \mu = 2\)

Il piano \(\pi\) cercato è:

\[1(\lambda + 3\mu - 1) + 2(\tau + 1) = 0\]

\[\Pi: \quad \lambda + 3\mu + 2\tau + 1 = 0\]

\[B = (3,\ 2,\ 2) \notin \Pi\]

La retta che stiamo cercando è quella che passa per \(A + B\), dove \(B\) è la proiezione ortogonale di \(B\) sul piano \(\Pi\).

\[\Rightarrow \quad \vec{m} = (1,\ 3,\ 2)\quad \text{è un vettore \perp \Pi}\]

La retta che passa per \(B\) ed è \perp al piano \(\Pi\) è:

\[X = B + t\vec{m} \quad \Rightarrow\quad \begin{cases} \lambda = 3 + t \\ \mu = 2 + 3t \\ \tau = 2 + 2t \end{cases}\]

Per trovare \(B\) metto a sistema con l’equazione del piano \(\Pi\):
\[ B' : \begin{cases} 
  x = 3 + t \\
  y = 2 + 3t \\
  z = 2 + 2t \\
  x + 3y + 2z + 1 = 0 
\end{cases} \]

\[(3 + t) + 3(2 + 3t) + 2(2 + 2t) + 1 = 0 \]

\[\Rightarrow \ t = -1 \]

\[\Rightarrow \ B' = (2, -1, 0) \]

Troviamo la retta che passa per \( A \) e \( B' \):

\[ B' - A = (2, -2, 2) \] vettore direzione della retta.

Le eq. della retta cercata sono:

\[ x = A + \lambda (2, -2, 2) \]

\[ \begin{cases} 
  x = 0 + 2\lambda \\
  y = 1 - 2\lambda \\
  z = -2 + 2\lambda 
\end{cases} \] (eq. parametriche della retta cercata)

( scritto del 9 settembre 2013)

\[ \mathbb{R}^3 \]

Punti: \( A = (2, 0, 1) \)

\( B = (1, 2, -2) \)
Piano \( \pi \): \( x + 2y - z + 3 = 0 \)

(a) Trovare la lunghezza del segmento \( A'B' \), proiezione ortogonale del segmento \( AB \) sul piano \( \pi \).

Basta trovare i punti \( A' \) e \( B' \) che sono le proiezioni ortogonali di \( A \) e \( B \) sul piano \( \pi \).

\( \vec{m} = (1, 2, -1) \)

Retta per \( A \) parallela a \( \vec{m} \):

\[
\begin{align*}
\begin{cases}
x = 2 + t \\
y = 0 + 2t \\
z = 1 - t
\end{cases}
\Rightarrow A' = \left( \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right)
\]

\( x + 2y - z + 3 = 0 \)

In modo analogo si trova \( B' = \left( -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right) \)

\[
\text{dist}(A', B') = \| B' - A' \| = 2\sqrt{2}
\]
(5) Trovare l'eq. della retta \( l \subset \mathbb{R}^3 \),
formata dai punti \( P \in \mathbb{R}^3 \) tali che
\[ \text{dist}(P, A) = \text{dist}(P, B). \]

\[ P = (x, y, z) \]

\[ \text{dist}(P, A) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2} \]

\[ \text{dist}(P, B) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2} \]

\[ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 \]

\[ x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = \]

\[ = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 4z + 4 \]

\[ \Rightarrow 2x - 4y + 6z + 4 = 0 \] (è il piano formato
da tutti i punti \( P = (x, y, z) \) che sono
equidistanti da \( A \) e \( B \))

\( P \in \mathbb{R} \) \( \Leftarrow \) \( x + 2y - z + 3 = 0 \)

\( \Rightarrow \) \( l : \left\{ \begin{array}{l}
  x + 2y - z + 3 = 0 \\
  2x - 4y + 6z + 4 = 0
\end{array} \right\} \)
(c) Determinare il raggio della circonferenza ottenuta interselando la sfera di centro 
\[ C = (2, 0, -4) \] e raggio 4 con il piano \( \Pi \).

Il centro \( C' \) della circonferenza è la proiezione ortogonale del centro \( C \) della sfera sul piano \( \Pi \).

\[
\text{dist}(C, C') = \text{dist}(C, \gamma)
\]
\[
= \frac{|2 + 2 \cdot 0 - (-4) + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2} \sqrt{6}
\]

\[
\text{dist}(C', S)^2 = \text{dist}(C, S)^2 - \text{dist}(C, C')^2
\]
\[
= 4^2 - \left( \frac{9}{\sqrt{6}} \right)^2 = 16 - \frac{81}{6} = \frac{5}{2}
\]

Quindi il raggio della circonferenza è \( \sqrt{\frac{5}{2}} \).
Osservazione: il metodo che abbiamo usato nel punto (b) ci permette anche di trovare le equazioni di altri "luoghi geometrici".

Esempio: in $\mathbb{A}^3$ siamo dati il punto $P = (1, -2, -1)$ e il piano $\pi$ di eq.

$$\pi: 2x - y - 2z + 1 = 0.$$  

Determinare l'equazione del luogo dei punti equidistanti dal punto $P$ e dal piano $\pi$.

Sia $X = (x, y, z)$. Si ha:

$$\text{dist} (X, P) = \|X - P\| = \| (x-1, y+2, z+1) \| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2}$$

$$\text{dist} (X, \pi) = \frac{|2x - y - 2z + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

Uguagliando queste distanze e elevando alla seconda si ottiene:
\[(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = \frac{(2x-y-2z+1)^2}{9}\]

Sviluppando i calcoli si trova, alla fine, l'equazione

\[5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy + 8xz - 4yz - 22x + 38y + 22z + 53 = 0.\]

Questa è l'equazione cercata.

(l'è un paraboloido)