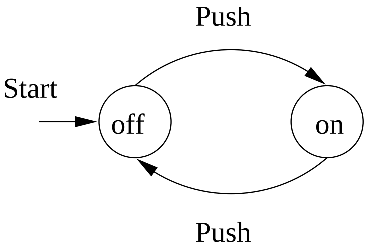
Automi a stati finiti

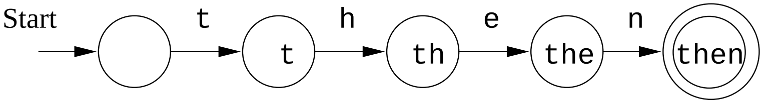
Sommario

- **Automa:** Dispositivo capace di eseguire una sequenza di azioni/operazioni in modo automatico
- **Automa a stati finiti:** Automa con una memoria finita
- **Automa stati finiti come modello per**
  - Software per la progettazione di circuiti digitali.
  - Analizzatori lessicali di un compilatore.
  - Ricerca di parole chiave in un file o sul web.
  - Software per verificare i protocolli di comunicazione.

- Automa a stati finiti per un interruttore on/off



- Automa a stati finiti che riconosce la stringa `then`



Rappresentare automi a stati finiti

Grafo: la piu' semplice rappresentazione

- **Nodi** = stati
- **Archi** rappresentano transizioni
- **Etichette** sugli archi ci dicono cosa causa la transizione

Concetti di base della teoria degli automi

- **Alfabeto**: Insieme finito e non vuoto di simboli
  - Esempio: $\Sigma = \{0, 1\}$ alfabeto binario
  - Esempio: $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$ insieme di tutte le lettere minuscole
  - Esempio: Insieme di tutti i caratteri ASCII
- **Stringa:** Sequenza finita di simboli presi da un alfabeto Σ
  - Esempio: 0011001 (stringa su $\Sigma = \{0, 1\}$)
- **Stringa vuota:** La stringa con zero occorrenze di simboli da Σ
  - La stringa vuota e' denotata con ϵ

- **Lunghezza di una stringa:** Numero di posizioni per i simboli nella stringa
  $|w|$ denota la lunghezza della stringa w
  $|0110| = 4, |\epsilon| = 0$
- **Potenze di un alfabeto:** Σ^k = insieme delle stringhe di lunghezza k con simboli da Σ
  Example: $\Sigma = \{0, 1\}$
  $\Sigma^1 = \{0, 1\}$
  $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$
  $\Sigma^0 = \{\epsilon\}$
  Domanda: Quante stringhe ci sono in Σ^3?

- L'insieme di tutte le stringhe su Σ e' denotato da Σ^*
  $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \cdots$
  Anche:
  $\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \cdots$
  $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\epsilon\}$
- **Concatenazione:** Se x e y sono stringhe, allora xy e' la stringa ottenuta mettendo una copia di y immediatamente dopo una copia di x
  $x = a_1 a_2 \ldots a_i, y = b_1 b_2 \ldots b_j$
  $xy = a_1 a_2 \ldots a_i b_1 b_2 \ldots b_j$
  Esempio: $x =$01101, $y =$ 110, $xy =$ 01101110
  Nota: Per ogni stringa x

$$x\epsilon = \epsilon x = x$$

Linguaggio: insieme di stringhe scelte da Σ^*, dove Σ e' un alfabeto. $L \subseteq \Sigma^*$ e' un linguaggio.

Esempi di linguaggi:

- L'insieme delle parole italiane legali
- L'insieme dei programmi C legali
- L'insieme delle stringhe che consistono di n zeri seguiti da n uni, con $n \geq 0$

$$\{\epsilon, 01, 0011, 000111, \ldots\}$$

- L'insieme delle stringhe con un numero uguale di zeri e di uni

$$\{\epsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1001, \ldots\}$$

- L' insieme dei numeri binari il cui valore e' primo

$$L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \ldots\}$$

Altri esempi di linguaggi

- Il linguaggio vuoto $\emptyset$ che non contiene nessuna stringa
- Il linguaggio $\{\epsilon\}$ consiste della stringa vuota

Nota: $\emptyset \neq \{\epsilon\}$

Nota: L'alfabeto Σ e' sempre finito

Problema: Sia Σ un alfabeto, $w \in \Sigma^*$ e L un linguaggio, $w \in L$?
La stringa w e' un elemento di un linguaggio L?

- Esempio: Dato un numero binario, e' primo = e' un elemento di L_P?

Dimostrazioni deduttive

- Sequenza di enunciati la cui verita' porta da un enunciato iniziale (l'ipotesi) ad un enunciato finale (la conclusione)
- Forma del teorema: Se H, allora C ($H \Rightarrow C$, H implica C)
- H= ipotesi, C= conclusione

- Teorema: se $x \geq 4$, allora $2^x \geq x^2$
- x parametro quantificato universalmente (vale per tutti gli x)

- Teoremi della forma "C1 se e solo se C2" : due direzioni di prova. (Si deve provare che: $C_1 \Rightarrow C_2$ e $C_2 \Rightarrow C_1$)
- Dimostrazione per assurdo di teoremi della forma $H \Rightarrow C$
  H e non C implica il falso
- Controesempio: per dimostrare che un teorema non vale basta provare che in un caso non vale
  - Esercizio: E' vero che se x e' un numero primo allora x e' dispari? No, infatti 2 e' numero primo ma non e' dispari

- Utili quando ci sono cose definite ricorsivamente
- Esempio:
  0 e' un intero e
  se n e' un intero allora n+1 e' un intero
- **Induzione sugli interi**: dobbiamo dimostrare un enunciato $S(n)$ su un intero n
  - **Base**: dimostriamo $S(i)$ per un intero particolare i (0 o 1 di solito)
  - **Passo induttivo**: si suppone $n \geq i$, si dimostra che se vale $S(n)$ allora vale $S(n+1)$

  Possiamo concludere che $S(n)$ e' vero per ogni $n \geq i$

Esempio - dimostrazione per induzione

- Se $x \geq 4$, allora $2^x \geq x^2$
- **Base:** $x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^4 = 16$ e $x^2 = 4^2 = 16$

  Induzione:

  Si suppone che per $x \geq 4$, $2^x \geq x^2$ (ipotesi induttiva)

  Dobbiamo dimostrare che $2^{x+1} \geq (x+1)^2$

  Abbiamo:

  - $2^{x+1} = 2^x \times 2 \geq x^2 \times 2 = 2x^2$ (per ipotesi induttiva)
  - Dimostriamo adesso che $2x^2 \geq (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
  - Cioe' dimostriamo che $x^2 \geq 2x + 1$
  - Cioe', semplificando (divido per x), dimostriamo che $x \geq 2 + 1/x$
  - Se $x \geq 4$, allora $1/x \leq 1/4$ e quindi $2 + 1/x \leq 2.25$
  - Quindi se $x \geq 4$, allora $x \geq 2 + 1/x$

  Abbiamo dimostrato che se $x \geq 4$, allora $2^x \geq x^2$

- Molte strutture possono essere definite ricorsivamente

- Espressioni:
  - **caso base**: qualunque numero o lettera e' un'espressione
  - **caso induttivo**:
    se E e F sono espressioni,
    allora lo sono anche $E + F$, $E \times F$ e (E)
  - Esempi: 3+(4x2), (2x(5+7))x4

- Per dimostrare teoremi su una struttura X:
  - si dimostra l'enunciato sul caso base della def. di X, poi
  - si suppone che l'enunciato sia vero
    sulle strutture di cui X e' composta secondo la definizione ricorsiva
  - si dimostra l'enunciato sulla struttura X

Esempio

- Dimostrare con induzione strutturale che ogni espressione ha un numero uguale di parentesi aperte e chiuse
  - Caso base: un carattere ha zero parentesi aperte e zero parentesi chiuse $\Rightarrow$ vero
  - Induzione: Suppongo che E e F hanno un numero uguale di parentesi aperte e chiuse.
    Devo dimostrare che $E + F$, $E \times F$ e (E) hanno un numero uguale di parentesi aperte e chiuse
  - Per $E + F$ e $E \times F$: se vale l'enunciato per E e F, supponiamo che E abbia n parentesi aperte e chiuse e F ne abbia m
    $\Rightarrow$ $E + F$ ne ha $n + m$ parentesi aperte e $n + m$ parentesi chiuse
  - Per (E): se vale per E, supponiamo che E abbia n parentesi aperte e n chiuse
    $\Rightarrow$ (E) ha $n + 1$ parentesi aperte e $n + 1$ parentesi chiuse

Induzione mutua

- Non e' sempre possibile dimostrare un singolo enunciato per induzione
- Si devono dimostrare congiuntamente un gruppo di enunciati $S_1(n), S_2(n)$,..., $S_k(n)$ per induzione su n.

- Introduzione agli automi a stati finiti
- Concetti di base della teoria degli automi
- Tecniche di dimostrazione
- Automi a stati finiti deterministici (DFA)
- Automi a stati finiti non deterministici (NFA)
- Automi a stati finiti non deterministici con ϵ-transizione (ϵ-NFA)

Un **DFA** e' una quintupla

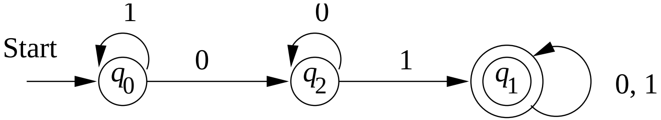
$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q e' un insieme finito di *stati*
- Σ e' un *alfabeto* *finito* (= simboli di input)
- δ e' una *funzione di transizione*: $Q \times \Sigma \to Q$, $(q, a) \mapsto p$
- $q_0 \in Q$ e' lo *stato iniziale*
- $F \subseteq Q$ e' un insieme di *stati finali* (o stati accettanti)

Esempio: Un automa A che accetta
$L = \{x01y : x, y \in \{0,1\}^*\}$
L'automa $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$ come una *tabella di transizione*:

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$\star q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

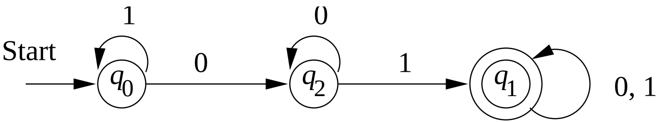
L'automa come un *diagramma di transizione*:



Un automa a stati finiti (FA) accetta una stringa $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ se esiste un cammino nel diagramma di transizione che

1. Inizia nello stato iniziale
2. Finisce in uno stato finale (di accettazione)
3. Ha una sequenza di etichette $a_1 a_2 \cdots a_n$

Esercizio: Il DFA



accetta la stringa 01101?

Linguaggio accettato

- La funzione di transizione δ puo' essere estesa a $\hat{\delta}$ che opera su stati e stringhe (invece che su stati e simboli)

Base: $$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$$
Induzione: $$\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

- Formalmente, il *linguaggio accettato da A* e'

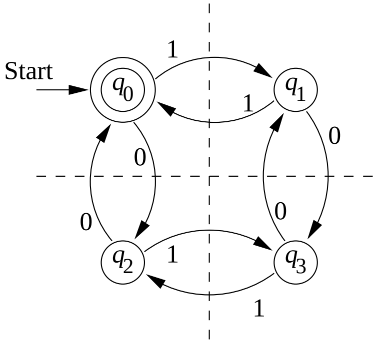
$$L(A) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

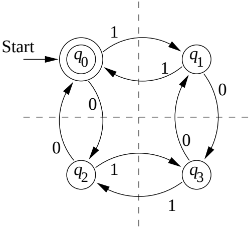
- I linguaggi accettati da automi a stati finiti sono detti *linguaggi regolari*

Esercizio

Costruire un DFA A che accetta tutte e sole le stringhe con un <u>numero pari di zeri</u> e un <u>numero pari di uni</u>

Costruire un DFA A che accetta tutte e sole le stringhe con un numero pari di zeri e un numero pari di uni

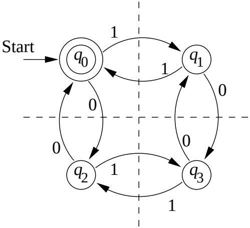




Rappresentazione tabulare dell'automa

	0	1
$\star \rightarrow q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Esercizio



$w = 0101 \in L(A)$? Sì, poichè $\hat{\delta}(q_0, 0101)$ è uno stato accettante.

$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$
$\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \epsilon), 0) = \delta(q_0, 0) = q_2$
$\hat{\delta}(q_0, 01) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 0), 1) = \delta(q_2, 1) = q_3$
$\hat{\delta}(q_0, 010) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 01), 0) = \delta(q_3, 0) = q_1$
$\hat{\delta}(q_0, 0101) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 010), 1) = \delta(q_1, 1) = q_0$

- DFA A per i seguenti linguaggi sull'alfabeto $\{0, 1\}$:
  1. Insieme di tutte le strighe che finiscono con 00
  2. Insieme di tutte le stringhe con tre zeri consecutivi
  3. Insieme delle stringhe con 011 come sottostringa
  4. Insieme delle stringhe che cominciano o finiscono (o entrambe le cose) con 01

- Ex.5 - Primo Compitino 2013
  Sia $L = \{w \in \{0, 1\}^*$ tale che w ha esattamente una sola occorrenza della sottostringa $00\}$
  1. Disegnare il diagramma di transizione di un DFA che riconosce L.
  2. Caratterizzare gli stati con una breve descrizione a parole (cioè per ogni stato descrivere le stringhe che portano ad esso).
  3. Assumendo di aver già dimostrato che gli stati non accettanti sono caratterizzati dalle stringhe descritte al punto precedente, dimostrare per mutua induzione che:
     (1) se $w \in L$ allora $w \in L(A)$
     (2) se $w \in L(A)$ allora $w \in L$.
- Esercizi per casa: tutti gli esercizi delle dispense sui DFA

Sommario

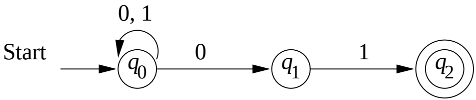
- Introduzione agli automi a stati finiti
- Concetti di base della teoria degli automi
- Tecniche di dimostrazione
- Automi a stati finiti deterministici (DFA): esercizi
- Automi a stati finiti non deterministici (NFA): definizioni
- Automi a stati finiti non deterministici con ϵ-transizione (ϵ-NFA)

Esercizi su DFA

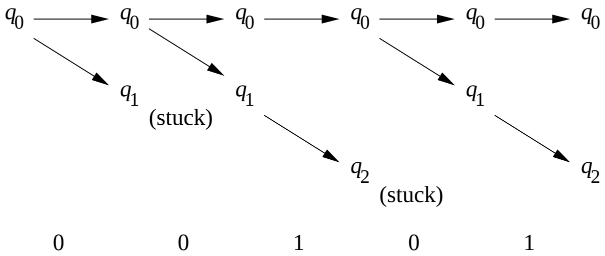
- Costruire un DFA per il seguente linguaggi sull'alfabeto $\{0, 1\}$: Insieme delle stringhe che cominciano o finiscono (o entrambe le cose) con 01
- Definire il linguaggio accettato dai DFA descritti alla lavagna sull'alfabeto $\{a, b\}$
- Sia $L = \{w \in \{0, 1\}^*$ tale che w ha esattamente una sola occorrenza della sottostringa 00$\}$
  - Assumendo di aver già dimostrato che gli stati non accettanti sono caratterizzati dalle stringhe descritte al punto precedente, dimostrare per mutua induzione che:
    (1) se $w \in L$ allora $w \in L(A)$
    (2) se $w \in L(A)$ allora $w \in L$.

Un NFA puo' essere in vari stati nello stesso momento

Esempio: un automa che accetta tutte e solo le stringhe che finiscono in 01.



Ecco cosa succede quando l'automa elabora l'input 00101



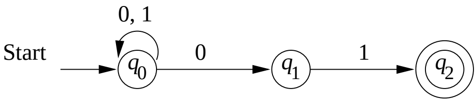
Definizione formale di NFA

Formalmente, un NFA e' una quintupla

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q e' un insieme finito di stati
- Σ e' un alfabeto finito
- δ e' una funzione di transizione $Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ (cioe' l'insieme dei sottoinsiemi di Q), $(q, a) \mapsto \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $n \geq 1$
- $q_0 \in Q$ e' lo *stato iniziale*
- $F \subseteq Q$ e' un insieme di *stati finali*

L'NFA appena visto



e' definito da

$$(\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

dove δ e' la funzione di transizione

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\star q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Funzione di transizione estesa $\hat{\delta}$.

Base: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}$

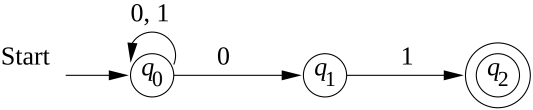
Induzione:

$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)$$

Il *linguaggio accettato da* A e'

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Esempio



La stringa 001 appartiene a $L(A)$?

$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
$\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
$\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
$\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$ contiene q_2 accettante quindi $001 \in L(A)$

Sommario

- Introduzione agli automi a stati finiti
- Concetti di base della teoria degli automi
- Tecniche di dimostrazione
- Automi a stati finiti deterministici (DFA)
- Automi a stati finiti non deterministici (NFA): teoremi
- Automi a stati finiti non deterministici con ϵ-transizione (ϵ-NFA)

Equivalenza di DFA e NFA

- Gli NFA sono di solito piu' facili da "programmare".

- Per ogni NFA N c'e' un DFA D, tale che $L(D) = L(N)$, e viceversa.
  Per dimostrarlo si usa una construzione a sottonsiemi.
  Dato un NFA
  $$N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$$
  costruiremo un DFA
  $$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$$
  tali che
  $$L(D) = L(N)$$

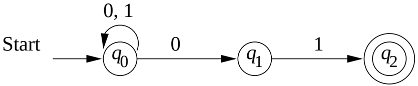
I dettagli della costruzione a sottoinsiemi:

- $Q_D = \{S : S \subseteq Q_N\}$.
  Nota: $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$, anche se la maggior parte degli stati in Q_D sono "garbage", cioe' non raggiungibili dallo stato iniziale.

- $F_D = \{S \subseteq Q_N : S \cap F_N \neq \emptyset\}$

- Per ogni $S \subseteq Q_N$ e $a \in \Sigma$,

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$



Costruiamo δ_D dall'NFA sopra:

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\star\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\star\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\star\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\star\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

In particolare:

$\delta_D(\{q_0\}, 0) = \delta_N(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

$\delta_D(\{q_0\}, 1) = \delta_N(q_0, 1) = \{q_0\}$

$\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \delta_N(q_0, 0) \cup \delta_N(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$

$\delta_D(\{q_0, q_1\}, 1) = \delta_N(q_0, 1) \cup \delta_N(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

Nota: Gli stati di D corrispondono a sottoinsiemi di stati di N, ma potevamo denotare gli stati di D in un altro modo, per esempio $A, \ldots, F$.

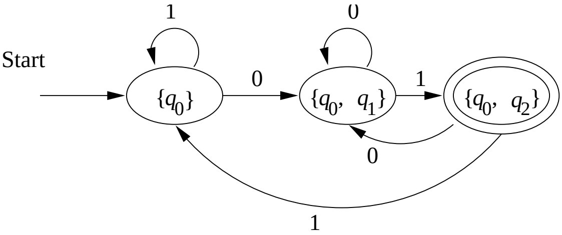
	0	1
A	A	A
$\rightarrow B$	E	B
C	A	D
$\star D$	A	A
E	E	F
$\star F$	E	B
$\star G$	A	D
$\star H$	E	F

Possiamo spesso evitare la crescita esponenziale degli stati costruendo la tabella di transizione per D solo per stati accessibili S come segue:

Base: $S = \{q_0\}$ e' accessibile in D

Induzione: Se lo stato S e' accessibile, anche gli stati in $\bigcup_{a \in \Sigma} \delta_D(S, a)$ sono accessibili.

Esempio: Il DFA con stati accessibili solamente.



Teorema 2.11: Sia D il DFA ottenuto da un NFA N con la costruzione a sottoinsiemi. Allora $L(D) = L(N)$.

Prova:
$L(N) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F_N \neq \emptyset\}$
$L(D) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) \in F_D\} = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) \cap F_N \neq \emptyset\}$
Per provare $L(D) = L(N)$ basta provare che, $\forall w$,

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w) \tag{1}$$

Mostriamo l'enunciato (1) per induzione su $|w|$

Base: $w = \epsilon$.
$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\}$ per definizione di $\hat{\delta}_D$
$\hat{\delta}_N(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$ per definizione di $\hat{\delta}_N$

Ip. Induttiva: L'enunciato (1) vale $\forall w$ con $|w| \leq n$

Passo Induttivo: Devo dimostrare che l'enunciato (1) vale per w con $|w| = n + 1$. Sia $w = xa$.

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, xa) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_D(\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x), a)$$

$$\stackrel{\text{i.h.}}{=} \delta_D(\hat{\delta}_N(q_0, x), a)$$

$$\stackrel{\text{cst}}{=} \bigcup_{p \in \hat{\delta}_N(q_0, x)} \delta_N(p, a)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \hat{\delta}_N(q_0, xa)$$

Ora segue che $L(D) = L(N)$.

Teorema 2.12: Un linguaggio L e' accettato da un DFA $\Longleftrightarrow$ L e' accettato da un NFA.

Prova:

- La parte "$\Leftarrow$" e' il Teorema 2.11.
- Per la parte "$\Rightarrow$" notiamo che un qualsiasi DFA puo' essere convertito in un NFA equivalente modificando la δ_D in δ_N secondo la regola seguente:
  - Se $\delta_D(q, a) = p$, allora $\delta_N(q, a) = \{p\}$.

  Si puo' mostrare per induzione su $|w|$ che se $\hat{\delta}_D(q_0, w) = p$, allora $\hat{\delta}_N(q_0, w) = \{p\}$.

  L'enunciato del teorema segue.

- Esercizio 3 - I compitino 2013:

  Dato il seguente NFA: N=($\{q_0, q_1\}$,$\{0, 1\}$,δ_N, q_0, $\{q_1\}$), dove $\delta_N(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$, $\delta_N(q_0, 1) = \{q_1\}$, $\delta_N(q_1, 0) = \emptyset$, $\delta_N(q_1, 1) = \{q_0, q_1\}$.

  1. Verificare se le stringhe $w_1 = 101$ e $w_2 = 0010$ vengono o meno accettate dall'automa mostrando tutti i passaggi.
  2. Costruire il diagramma di transizione del DFA equivalente all'NFA dato
  3. Descrivere a parole il linguaggio accettato dall'automa (suggerimento: è più facile osservando il DFA).

- Esercizio 3 (1): $w_1 = 101$ e $w_2 = 0010$ accettate dall'NFA N?
  - $w_1 = 101 \in L(A)$?
    $\hat{\delta}_N(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
    $\hat{\delta}_N(q_0, 1) = \delta_N(q_0, 1) = \{q_1\}$
    $\hat{\delta}_N(q_0, 10) = \delta_N(q_1, 0) = \emptyset$ quindi $w_1 = 101 \notin L(A)$
  - $w_2 = 0010 \in L(A)$?
    $\hat{\delta}_N(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
    $\hat{\delta}_N(q_0, 0) = \delta_N(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
    $\hat{\delta}_N(q_0, 00) = \delta_N(q_0, 0) \cup \delta_N(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
    $\hat{\delta}_N(q_0, 001) = \delta_N(q_0, 1) \cup \delta_N(q_1, 1) = \{q_1\} \cup \{q_0, q_1\} = \{q_0, q_1\}$
    $\hat{\delta}_N(q_0, 0010) = \delta_N(q_0, 0) \cup \delta_N(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
    Poiche' $\{q_0, q_1\} \cap q_1 \neq \emptyset$, $w_2 = 0010 \in L(A)$

- Esercizio 3 (2) Costruire il diagramma di transizione del DFA equivalente all'NFA dato?

  - $\delta_D(\{q_0\},0) = \delta_N(q_0,0) = \{q_0,q_1\}$
    $\delta_D(\{q_0\},1) = \delta_N(q_0,1) = \{q_1\}$

  - $\delta_D(\{q_0,q_1\},0) = \delta_N(q_0,0) \cup \delta_N(q_1,0) = \{q_0,q_1\} \cup \emptyset = \{q_0,q_1\}$
    $\delta_D(\{q_0,q_1\},1) = \delta_N(q_0,1) \cup \delta_N(q_1,1) = \{q_1\} \cup \{q_0,q_1\} = \{q_0,q_1\}$

  - $\delta_D(\{q_1\},0) = \delta_N(q_1,0) = \emptyset$
    $\delta_D(\{q_1\},1) = \delta_N(q_1,1) = \{q_0,q_1\}$

  - Disegnare graficamente il diagramma:
    $\{q_0\}$ stato iniziale, $\{q_0,q_1\}$ e $\{q_1\}$ stati accettanti

- Esercizio 3 (3) Descrivere il linguaggio accettato dall'automa

$$L(A) = \{w \in \{0,1\}^+ | w = 1 \text{ } o \text{ } w = 0x \text{ } o \text{ } w = 11y,\ x,y \in \{0,1\}^*\}$$

Esercizi su NFA

- Esercizi per casa:
  - Costruire un NFA che accetta l'insieme delle stringhe di 0 e di 1 con due 0 consecutivi o con due 1 consecutivi
  - Costruire un NFA che accetta l'insieme delle stringhe di a e di b e di c composte da
    zero o piu' a seguite da zero o piu' b seguite da zero o piu' c
  - Costruire un NFA che accetta l'insieme delle stringhe di 0 e di 1 tale che almeno uno degli ultimi tre simboli e' 1
  - Esercizi 2.3.1 e 2.3.2 del libro:
    Convertire in un DFA un NFA dato
  - Esercizi delle dispense su NFA

Automi a stati finiti non deterministici con ϵ-transizione (ϵ-NFA)

- Sono un'estensione degli NFA dove permetto transizioni anche sulla stringa vuota
- Accettano sempre i linguaggi regolari
- Sono piu' facili da progettare degli NFA

Un ϵ-NFA e' una quintupla

$$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q e' un insieme finito di stati
- Σ e' un alfabeto finito
- δ e' una funzione da $Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to 2^Q$
- $q_0 \in Q$ e' lo *stato iniziale*
- $F \subseteq Q$ e' un insieme di *stati finali*

NFA e $\epsilon-$NFA molto usati per la ricerca di un pattern in un testo

Esempio: Costruire un NFA che accetta l'insieme delle parole chiave $\{web, ebay\}$

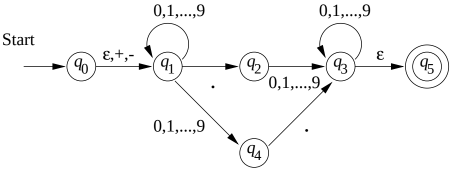
Esempio: Costruire un ϵ-NFA che accetta l'insieme delle parole chiave $\{web, ebay\}$

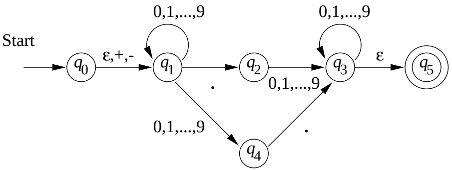
Esempio di ϵ-NFA

Un ϵ-NFA che accetta numeri decimali consiste di:

1. Un segno + o -, opzionale
2. Una stringa di cifre decimali
3. un punto decimale
4. un'altra stringa di cifre decimali

Una delle stringhe (2) e (4) sono opzionali





$$E = (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{., +, -, 0, 1, \ldots, 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

dove la tabella delle transizioni per δ e'

	ϵ	+,-	.	$0, \ldots, 9$
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$\star q_5$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Chiudiamo uno stato aggiungendo tutti gli stati raggiungibili da lui tramite una sequenza $\epsilon\epsilon\cdots\epsilon$

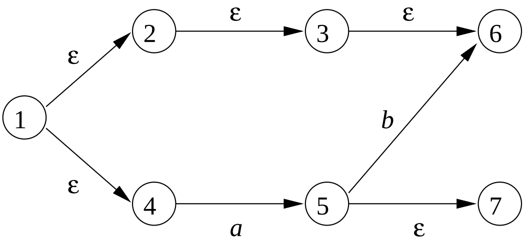
Definizione induttiva di ECLOSE(q)

Base:
$q \in$ ECLOSE(q)

Induzione:
$p \in$ ECLOSE(q) and $r \in \delta(p, \epsilon) \quad \Rightarrow r \in$ ECLOSE(q)

Si puo' applicare ECLOSE anche a un insieme S di stati

$$ECLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} ECLOSE(q)$$



Per esempio,

$$\mathsf{ECLOSE}(1) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

- Definizione induttiva di $\hat{\delta}$ per automi ϵ-NFA

Base:

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = \mathrm{ECLOSE}(q)$$

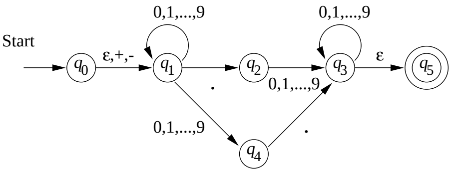
Induzione:

$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \delta(t,a),\ t \in \hat{\delta}(q,x)} \mathrm{ECLOSE}(p)$$

- Linguaggio accettato da un ϵ-NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Esercizio



Esercizio: $5.6 \in L(E)$?

- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 5) = \text{ECLOSE}(q_1) \cup \text{ECLOSE}(q_4) = \{q_1, q_4\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 5.) = \text{ECLOSE}(q_2) \cup \text{ECLOSE}(q_3) = \{q_2, q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 5.6) = \text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3, q_5\}$

$5.6 \in L(E)$ poiche' $\hat{\delta}(q_0, 5.6) \cap q_5 \neq \emptyset$

Sommario

- Introduzione agli automi a stati finiti
- Concetti di base della teoria degli automi
- Tecniche di dimostrazione
- Automi a stati finiti deterministici (DFA)
- Automi a stati finiti non deterministici (NFA): esercizi
- Automi a stati finiti non deterministici con ϵ-transizione (ϵ-NFA): teoremi ed esercizi

Esercizi su NFA

1. Costruire un NFA che accetta l'insieme delle stringhe di 0 e di 1 con <u>due 0 consecutivi o con due 1 consecutivi</u>
2. Costruire un NFA che accetta l'insieme delle stringhe di *a* e di *b* e di *c* composte da <u>zero o piu' *a* seguite da zero o piu' *b* seguite da zero o piu' *c*</u>
3. Costruire un NFA che accetta l'insieme delle stringhe di 0 e di 1 tale che <u>almeno uno degli ultimi tre simboli e' 1</u>

Chiudiamo uno stato aggiungendo tutti gli stati raggiungibili da lui tramite una sequenza $\epsilon\epsilon\cdots\epsilon$

Definizione induttiva di ECLOSE(q)

Base:
$q \in \mathrm{ECLOSE}(q)$

Induzione:
$p \in \mathrm{ECLOSE}(q)$ and $r \in \delta(p, \epsilon) \;\; \Rightarrow r \in \mathrm{ECLOSE}(q)$

Si puo' applicare ECLOSE anche a un insieme S di stati

$$ECLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} ECLOSE(q)$$

Ripasso: $\hat{\delta}$, $L(E)$

- Definizione induttiva di $\hat{\delta}$ per automi ϵ-NFA

Base:

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = \text{ECLOSE}(q)$$

Induzione:

$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \delta(t,a),\ t \in \hat{\delta}(q,x)} \text{ECLOSE}(p)$$

- Linguaggio accettato da un ϵ-NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Da ϵ-NFA a DFA

Dato un ϵ-NFA

$$E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$$

costruiremo un DFA

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$$

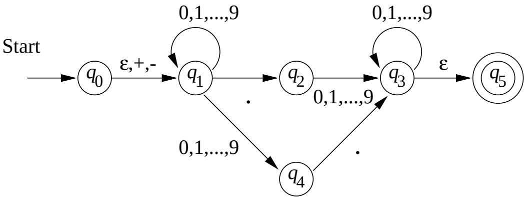
tale che

$$L(D) = L(E)$$

Dettagli della costruzione:

- $Q_D = \{S : S \subseteq Q_E \text{ e } S = \text{ECLOSE}(S)\}$
- $q_D = \text{ECLOSE}(q_0)$
- $F_D = \{S : S \in Q_D \text{ e } S \cap F_E \neq \emptyset\}$
- $\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in \delta_E(t,a), t \in S} \text{ECLOSE}(p)$

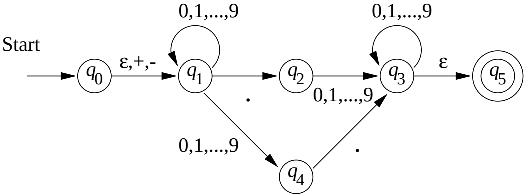
ϵ-NFA E



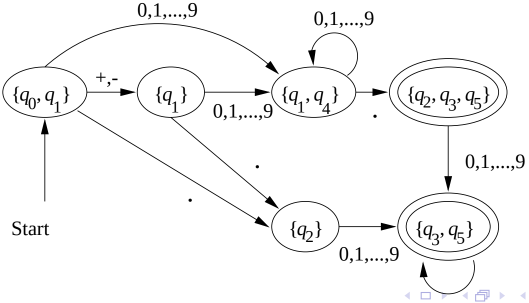
Costruiamo DFA D corrispondente ad E:

- Si calcola $\underline{q_D}$ (stato iniziale)
- Per ogni stato S accessibile da q_D si calcola la funzione di transizione $\underline{\delta_D(S,a),\ \forall a \in \Sigma = \{.,+,-,0,1,\ldots,9\}}$
  - $q_D = ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1\}$
  - $\delta_D(\{q_0,q_1\},+) = ECLOSE(\delta_E(q_0,+)) \cup ECLOSE(\delta_E(q_1,+)) = ECLOSE(\{q_1\}) \cup ECLOSE(\emptyset) = \{q_1\} \cup \emptyset = \{q_1\}$
  - Completarlo per casa

ϵ-NFA E



DFA D corrispondente ad E



Teorema 2.22: Un linguaggio L e' accettato da un ϵ-NFA $E \iff L$ e' accettato da un DFA.

Prova:

- $(\Longleftarrow)$ Trasformiamo un DFA D in un ϵ-NFA aggiungendo la transizione $\delta_E(q, \epsilon) = \emptyset$, $\forall q$ in D
  $\forall q$ in D e $\forall a \in \Sigma$ la transizione $\delta_D(q, a) = p$ diventa $\delta_E(q, a) = \{p\}$
  Poiche' le transizioni di D e E sono le stesse si conclude che $L(E) = L(D)$.
- $(\Longrightarrow)$ Usiamo D costruito come sopra.
  $L(E) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}_E(q_0, w) \cap F_E \neq \emptyset\}$
  $L(D) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}_D(q_D, w) \in F_D\} = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}_D(q_D, w) \cap F_E \neq \emptyset\}$
  Per dimostrare che $L(D) = L(E)$ basta mostrare per induzione su $|w|$ che $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$

  Base: $\hat{\delta}_E(q_0, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ECLOSE}(q_0) \stackrel{\text{cst}}{=} q_D \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\delta}_D(q_D, \epsilon)$

Ip. induttiva: $\hat{\delta}_E(q_0, x) = \hat{\delta}(q_D, x)$
Induzione:

$\hat{\delta}_D(q_D, xa)$

$\stackrel{\text{def}}{=} \delta_D(\hat{\delta}_D(q_D, x), a)$

$\stackrel{\text{ip.ind}}{=} \delta_D(\hat{\delta}_E(q_0, x), a)$
$\stackrel{\text{cst}}{=} \bigcup_{p \in \delta_E(t,a),\ t \in \hat{\delta}_E(q_0,x)} \mathsf{ECLOSE}(p)$

$\stackrel{\text{def}}{=} \hat{\delta}_E(q_0, xa)$

Esercizi su ϵ-NFA

1. Costruire un ϵ-NFA che accetta l'insieme delle stringhe di a e di b e di c composte da zero o piu' a seguite da zero o piu' b seguite da zero o piu' c
2. Costruire un ϵ-NFA che accetta l'insieme delle stringhe di 0 e di 1 formate da 01 ripetuto una o piu' volte o da 010 ripetuto una o piu' volte
3. Costruire un ϵ-NFA che accetta l'insieme delle stringhe di 0 e di 1 tale che almeno uno degli ultimi tre simboli e' 1
4. Esercizi 2.5.1* e 2.5.2 del libro
   Dato un ϵ-NFA E
   - Calcolare l'ϵ-close di ogni stato di E
   - Elencare tutte le stringhe di lunghezza minore o uguale a 3 accettate da E
   - Trasformare E in un DFA equivalente
5. Esercizi delle dispense su ϵ-NFA