Grammatiche libere da contesto

Grammatiche e Linguaggi Liberi da Contesto

- Abbiamo visto che molti linguaggi non sono regolari. Consideriamo allora classi piu' grandi di linguaggi
- I **Linguaggi Liberi da Contesto** (CFL) sono stati usati nello studio dei linguaggi naturali dal 1950, e nello studio dei compilatori dal 1960
- Le **grammatiche libere da contesto** (CFG) sono una notazione formale per definire linguaggi definiti da regole ricorsive
- Studieremo:
  - CFG
  - CFL
  - alberi sintattici
  - automi a pila
  - proprieta' di chiusura dei CFL

Esempio di CFL

- Consideriamo $L_{pal} = \{w \in \Sigma^* : w = w^R\}$
- Per esempio: $\texttt{otto} \in L_{pal}$, $\texttt{madamimadam} \in L_{pal}$.

- L_{pal} non e' regolare.
  - Sia $\Sigma = \{0, 1\}$. Dimostriamo grazie al **Pumping lemma** che L_{pal} non e' regolare
  - Il giocatore G1 vuole dimostrare che L_{pal} non e' regolare.
  - Il giocatore G2 sceglie n.
  - Il giocatore G1 sceglie $w = 0^n 1 0^n \in L_{pal}$, $|w| \geq n$.
  - Il giocatore G2 sceglie la partizione $w = xyz$ tale che $y \neq \epsilon$ e $|xy| \leq n$.
  - Il giocatore G1 sceglie $k = 0$ e dimostra che $xz \notin L_{pal}$ poiche', avendo scelto $w = 0^n 1 0^n$, il numero dei primi zeri in xz e' strettamente minore del numero dei secondi zeri essendo $y \neq \epsilon$, $|xy| \leq n$.

Esempio informale di CFG

- $L_{pal} = \{w \in \Sigma^* : w = w^R\}$
- Definiamo L_{pal} induttivamente:
  - **Base:** $\epsilon, 0,$ e 1 sono palindromi.
  - **Induzione:** Se w e' una palindrome, anche $0w0$ e $1w1$ lo sono.
  - Nessun altra stringa e' una palindrome.
- Le CFG sono un modo formale per def. linguaggi come L_{pal}.

1. $P \to \epsilon$
2. $P \to 0$
3. $P \to 1$
4. $P \to 0P0$
5. $P \to 1P1$

- 0 e 1 sono *terminali*
- P e' una *variabile* (o *nonterminale*, o *categoria sintattica*)
- P e' in questa grammatica anche il *simbolo iniziale*.
- 1–5 sono *produzioni* (o *regole*)

Definizione formale di CFG

Una *grammatica libera da contesto* e' una quadrupla

$$G = (V, T, P, S)$$

dove

- V e' un insieme finito di variabili
- T e' un insieme finito di terminali
- P e' un insieme finito di produzioni della forma $A \to \alpha$, dove A e' una variabile e $\alpha \in (V \cup T)^*$
- S e' una variabile chiamata il simbolo iniziale

Esempio

- Esempio: $G_{pal} = (\{P\}, \{0,1\}, A, P)$,
  dove $A = \{P \to \epsilon, P \to 0, P \to 1, P \to 0P0, P \to 1P1\}$.

  A volte raggruppiamo le produzioni con la stessa testa:
  $A = \{P \to \epsilon | 0 | 1 | 0P0 | 1P1\}$.

Esempio

Esempio: Espressioni (semplici) in un tipico ling. di programmazione:

- Gli operatori sono $+$ e *
- Gli operandi sono identificatori, cioe' stringhe in $L((\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*)$

Esempio

Esempio: Espressioni (semplici) in un tipico ling. di programmazione: gli operatori sono $+$ e * e gli operandi sono identificatori, cioe' stringhe in $L((\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*)$

Usiamo la grammatica $G = (\{E, I\}, T, P, E)$ dove
$T = \{+, *, (,), a, b, 0, 1\}$ e P e' il seguente insieme di produzioni:

1. $E \to I$
2. $E \to E + E$
3. $E \to E * E$
4. $E \to (E)$
5. $I \to a$
6. $I \to b$
7. $I \to Ia$
8. $I \to Ib$
9. $I \to I0$
10. $I \to I1$

Derivazioni

- Derivazioni: per definire linguaggio di una CFG G, $L(G)$
- $L(G)$: stringhe di terminali che si possono derivare a partire dal simbolo iniziale
- Sia $G = (V, T, P, S)$ una CFG
  sia $A \in V$, siano $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$,
  sia $A \to \gamma \in P$
  Allora scriviamo

$$\alpha A \beta \underset{G}{\Rightarrow} \alpha \gamma \beta$$

  o, se e' ovvia la G, $\alpha A \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta$ e
  diciamo che da $\alpha A \beta$ si deriva $\alpha \gamma \beta$.
- Definiamo $\overset{*}{\Rightarrow}$ la chiusura riflessiva e transitiva di $\Rightarrow$, cioe':
  - **Base:** Sia $\alpha \in (V \cup T)^*$. Allora $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$.
  - **Induzione:** Se $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta$, e $\beta \Rightarrow \gamma$, allora $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$.

Esempio visto in precedenza

Esempio: Definire la grammatica delle espressioni (semplici) in un tipico ling. di programmazione: gli operatori sono + e * e gli operandi sono identificatori, cioe' stringhe in $L((\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*)$

Usiamo la grammatica $G = (\{E, I\}, T, P, E)$ dove
$T = \{+, *, (,), a, b, 0, 1\}$ e P e' il seguente insieme di produzioni:

1. $E \to I$
2. $E \to E + E$
3. $E \to E * E$
4. $E \to (E)$
5. $I \to a$
6. $I \to b$
7. $I \to Ia$
8. $I \to Ib$
9. $I \to I0$
10. $I \to I1$

Esempio

- Esercizio: Determinare una derivazione di $a * (a + b00)$ da E nella grammatica delle espressioni:

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E) \Rightarrow$$

$$a * (E + E) \Rightarrow a * (I + E) \Rightarrow a * (a + E) \Rightarrow a * (a + I) \Rightarrow$$

$$a * (a + I0) \Rightarrow a * (a + I00) \Rightarrow a * (a + b00)$$

  - Ad ogni passo potremmo avere varie regole tra cui scegliere, ad esempio
    $I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E)$, oppure
    $I * E \Rightarrow I * (E) \Rightarrow a * (E)$
  - Non tutte le scelte portano a derivazioni di una particolare stringa, per esempio

$$E \Rightarrow E + E$$

    non ci fa derivare $a * (a + b00)$

Derivazioni a sinistra e a destra

- **Derivazione a sinistra** $\underset{lm}{\Rightarrow}$: rimpiazza sempre la variabile piu' a sinistra con il corpo di una delle sue regole.
- **Derivazione a destra** $\underset{rm}{\Rightarrow}$: rimpiazza sempre la variabile piu' a destra con il corpo di una delle sue regole.
- Der. a sinistra: quella del lucido precedente.
- Der. a destra: quella seguente.

Esercizio per casa: Determinare una derivazione a destra di $a * (a + b00)$ da E nella grammatica delle espressioni:

$$E \underset{rm}{\Rightarrow} E * E \underset{rm}{\Rightarrow}$$

$$E * (E) \underset{rm}{\Rightarrow} E * (E + E) \underset{rm}{\Rightarrow} E * (E + I) \underset{rm}{\Rightarrow} E * (E + I0)$$

$$\underset{rm}{\Rightarrow} E * (E + I00) \underset{rm}{\Rightarrow} E * (E + b00) \underset{rm}{\Rightarrow} E * (I + b00)$$

$$\underset{rm}{\Rightarrow} E * (a + b00) \underset{rm}{\Rightarrow} I * (a + b00) \underset{rm}{\Rightarrow} a * (a + b00)$$

Possiamo concludere che $E \overset{*}{\underset{rm}{\Rightarrow}} a * (a + b00)$

Il linguaggio di una grammatica

- Se $G = (V, T, P, S)$ e' una CFG, allora il linguaggio di G e'

$$L(G) = \{w \in T^* : S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w\}$$

  cioe' l'insieme delle stringhe di terminali derivabili dal simbolo iniziale.

- Se G e' una CFG, chiameremo $L(G)$ un **linguaggio libero da contesto**

Esempio: $L(G_{pal})$ e' un linguaggio libero da contesto
$G_{pal} = (\{P\}, \{0,1\}, A, P)$, dove $A = \{P \to \epsilon|0|1|0P0|1P1\}$

Teorema 5.7: Sia $L_{pal} = \{w \in \{0,1\}^* : w = w^R\}$.
Allora $L(G_{pal}) = L_{pal}$.

Forme sentenziali

- Sia $G = (V, T, P, S)$ una CFG
  Sia $\alpha \in (V \cup T)^*$
  Se $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$ diciamo che α e' una forma sentenziale.

  Se $S \underset{lm}{\Rightarrow} \alpha$ diciamo che α e' una forma sentenziale sinistra
  Se $S \underset{rm}{\Rightarrow} \alpha$ diciamo che α e' una forma sentenziale destra

- Nota: $L(G)$ contiene le forme sentenziali che sono in T^*.

Esempi

- Prendiamo la G delle espressioni.
  $E * (I + E)$ e' una forma sentenziale perche'

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E * (E) \Rightarrow E * (E + E) \Rightarrow E * (I + E)$$

  Questa derivazione non e' ne' a sinistra ne' a destra

- $a * E$ e' una forma sentenziale sinistra, perche'

$$E \underset{lm}{\Rightarrow} E * E \underset{lm}{\Rightarrow} I * E \underset{lm}{\Rightarrow} a * E$$

- $E * (E + E)$ e' una forma sentenziale destra, perche'

$$E \underset{rm}{\Rightarrow} E * E \underset{rm}{\Rightarrow} E * (E) \underset{rm}{\Rightarrow} E * (E + E)$$

Esercizi

- Descrivere una CFG che genera il linguaggio seguente. Per ogni variabile descrivere l'insieme delle stringhe generate.
  1. $L = \{0^n 1^n, n \geq 0\}$
  2. $L = \{0^n 1^n, n \geq 1\}$
  3. $L = \{a^i b^j c^k, j \neq k\}$ (II compitino 2013)
- Descrivere il linguaggio generato dalla seguente CFG $G = (\{S, Z\}, \{0, 1\}, P, S)$, dove $P = \{S \to 0S1|0Z1, Z \to 0Z|\epsilon\}$

- Esercizi per casa
  - Descrivere una CFG che genera il linguaggio seguente: Per ogni variabile descrivere l'insieme delle stringhe generate.
    1. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = (0+1)^*1\}$
    2. $L = \{w \in \{0,1,2\}^+ | w = x2x'\}, x, x' \in (0+1)^*, x' = x^R\}$. $x' = x^R$ significa che x' è la stringa di x rovesciata, per esempio se $x = 011$ allora $x' = 110$ (III appello 2013).

Alberi sintattici

- Se $w \in L(G)$, per una CFG, allora w ha un albero sintattico, che ci dice la struttura (sintattica) di w
- w potrebbe essere un programma, una query SQL, un documento XML, ...
- Gli alberi sintattici sono una rappresentazione grafica alternativa alle derivazioni

- Ci possono essere diversi alberi sintattici per la stessa stringa
- Idealmente ci dovrebbe essere solo un albero sintattico (la "vera" struttura), cioe' il linguaggio dovrebbe essere non ambiguo
- Sfortunatamente, non sempre possiamo rimuovere l'ambiguita'

Costruzione di un albero sintattico

Sia $G = (V, T, P, S)$ una CFG
Un albero e' un albero sintattico per G se:

1. Ogni nodo interno e' etichettato con una variabile in V
2. Ogni foglia e' etichettata con un simbolo in $V \cup T \cup \{\epsilon\}$ Ogni foglia etichettata con ϵ e' l'unico figlio del suo genitore
3. Se un nodo interno e' etichettato A, e i suoi figli (da sinistra a destra) sono etichettati

$$X_1, X_2, \ldots, X_k,$$

allora $A \to X_1 X_2 \ldots X_k \in P$.

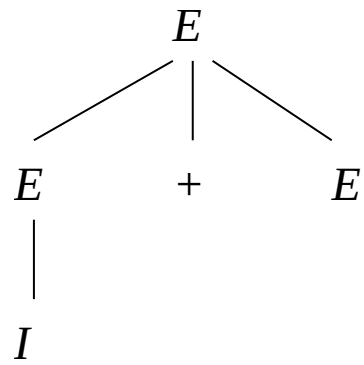
Esempio

Nella grammatica

1. $E \to I$
2. $E \to E + E$
3. $E \to E * E$
4. $E \to (E)$

$\vdots$

il seguente e' un albero sintattico:



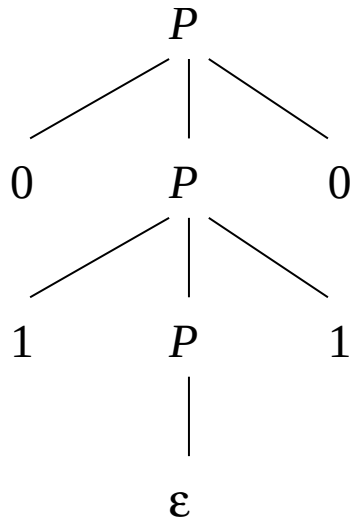
Questo albero sintattico mostra la derivazione $E \overset{*}{\Rightarrow} I + E$

Esempio

Nella grammatica

1. $P \to \epsilon$
2. $P \to 0$
3. $P \to 1$
4. $P \to 0P0$
5. $P \to 1P1$

il seguente e' un albero sintattico:



Mostra la derivazione $P \stackrel{*}{\Rightarrow} 0110$.

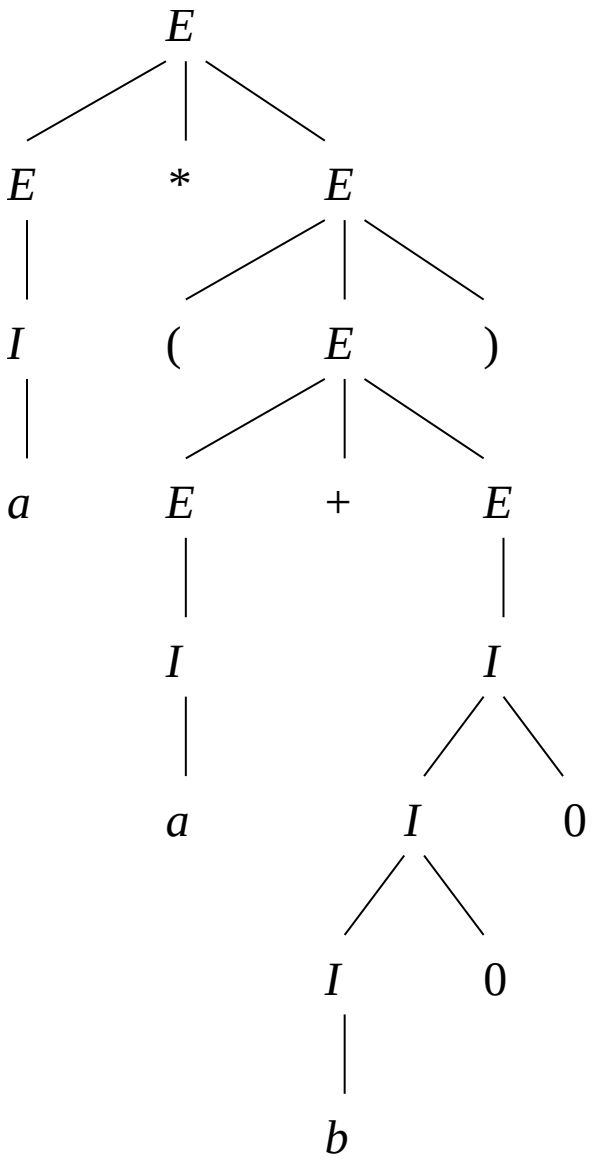
Il prodotto di un albero sintattico

- Il prodotto di un albero sintattico e' la stringa di foglie da sinistra a destra

- Sono importanti quegli alberi sintattici dove:
  1. Il prodotto e' una stringa terminale
  2. La radice e' etichettata dal simbolo iniziale

  L'insieme dei prodotti di questi alberi sintattici e' il linguaggio della grammatica

Esempio



Il prodotto e' $a * (a + b00)$

Sia $G = (V, T, P, S)$ una CFG e $A \in V$

I seguenti sono equivalenti:

1. $A \overset{*}{\Rightarrow} w$
2. $A \underset{lm}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$
3. $A \underset{rm}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$
4. C'e' un albero sintattico di G con radice A e prodotto w

Nella grammatica

1. $E \to I$
2. $E \to E + E$
3. $E \to E * E$
4. $E \to (E)$

$\ldots$

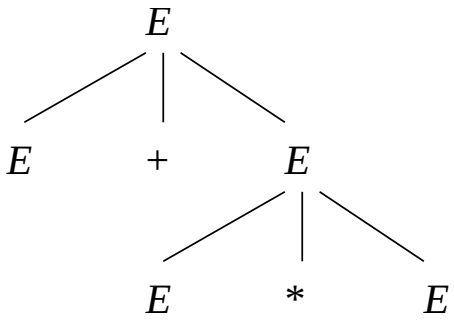
la forma sentenziale $\underline{E + E * E}$ ha due derivazioni:

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E$$

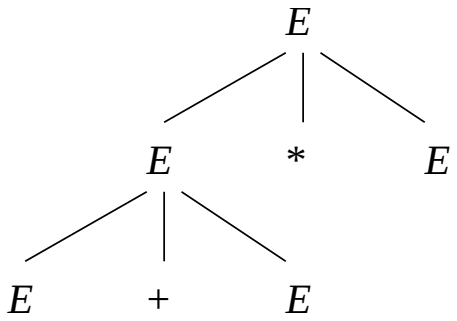
e

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$$

Questo ci da' <u>due alberi sintattici:</u>



(a)



(b)

L'esistenza di **varie derivazioni** di per se non e' pericolosa, e' l'esistenza di **vari alberi sintattici** che rovina la grammatica.
Esempio: Nella stessa grammatica

5. $I \to a$
6. $I \to b$
7. $I \to Ia$
8. $I \to Ib$
9. $I \to I0$
10. $I \to I1$

la stringa $a + b$ ha varie derivazioni:

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow I + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + I \Rightarrow a + b$$

e

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + I \Rightarrow I + I \Rightarrow I + b \Rightarrow a + b$$

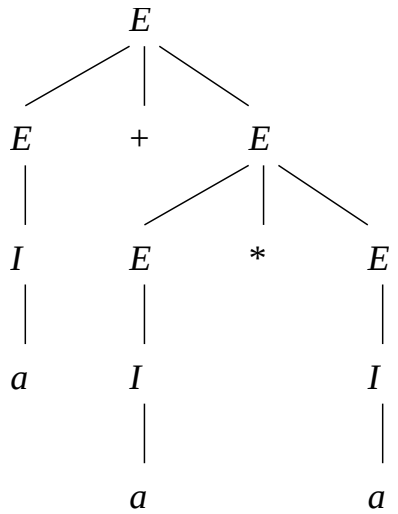
Pero' il loro albero sintattico e' lo stesso, e la struttura di $a + b$ e' quindi non ambigua

Ambiguita' in Grammatiche e Linguaggi

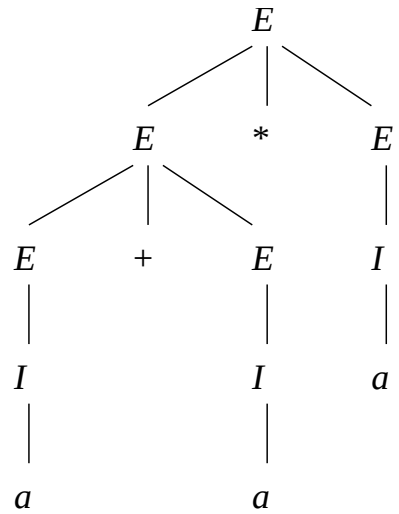
- Sia $G = (V, T, P, S)$ una CFG
  G e' ambigua se esiste una stringa w in T^* che
  ha piu' di un albero sintattico con radice S e prodotto w

- Se ogni stringa in $L(G)$ ha al piu' un albero sintattico, G e' detta non ambigua

- Esempio: La stringa terminale $a + a * a$ ha due alberi sintattici:



(a)



(b)

Rimuovere l'ambiguita' dalle grammatiche

- Buone notizie: a volte possiamo rimuovere l'ambiguita'
- Cattive notizie: non c'e' nessun algoritmo per farlo in modo sistematico
- Ancora cattive notizie: alcuni CFL hanno solo CFG ambigue
- Studiamo la grammatica

$$E \to I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

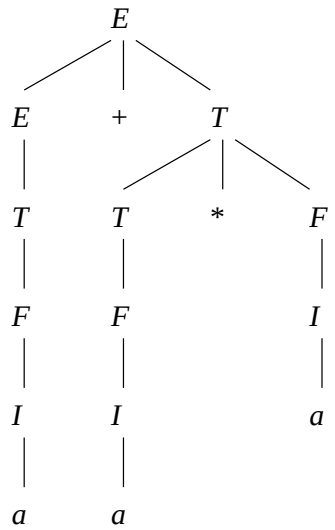
$$I \to a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

  - Non c'e' precedenza tra * e +
  - Non c'e' raggruppamento di sequenze di operatori: $E + E + E$ e' inteso come $E + (E + E)$ o come $(E + E) + E$?

Soluzione: Introduciamo piu' variabili, ognuna che rappresenta espressioni con lo stesso grado di "forza di legamento".
Consideriamo la seguente grammatica:

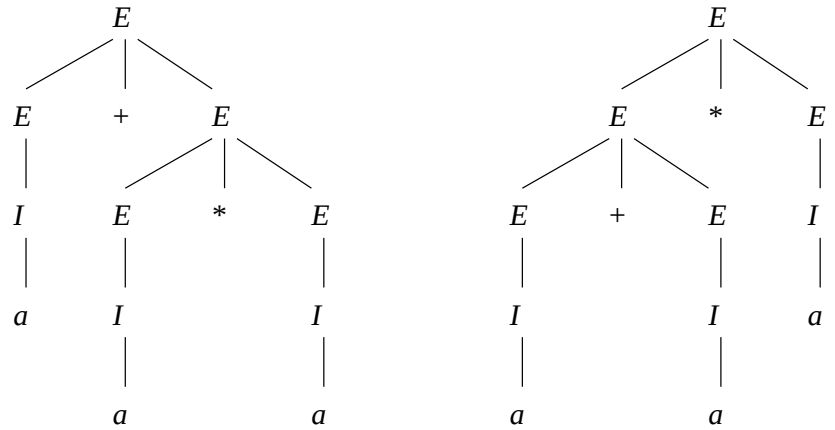
1. $I \to a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$
2. $F \to I \mid (E)$
3. $T \to F \mid T * F$
4. $E \to T \mid E + T$

Ora l'unico albero sintattico per $a + a * a$ e':



Derivazioni a sinistra e ambiguita'

I due alberi sintattici per $\underline{a + a * a}$ nella grammatica ambigua



(a) (b)

danno luogo a due derivazioni a sinistra:

$$E \underset{lm}{\Rightarrow} E + E \underset{lm}{\Rightarrow} I + E \underset{lm}{\Rightarrow} a + E \underset{lm}{\Rightarrow} a + E * E$$

$$\underset{lm}{\Rightarrow} a + I * E \underset{lm}{\Rightarrow} a + a * E \underset{lm}{\Rightarrow} a + a * I \underset{lm}{\Rightarrow} \underline{a + a * a}$$

e

$$E \underset{lm}{\Rightarrow} E * E \underset{lm}{\Rightarrow} E + E * E \underset{lm}{\Rightarrow} I + E * E \underset{lm}{\Rightarrow} a + E * E$$

$$\underset{lm}{\Rightarrow} a + I * E \underset{lm}{\Rightarrow} a + a * E \underset{lm}{\Rightarrow} a + a * I \underset{lm}{\Rightarrow} \underline{a + a * a}$$

In generale:

- Un albero sintattico, ma molte derivazioni

- Molte derivazioni a sinistra implica molti alberi sintattici
- Molte derivazioni a destra implica molti alberi sintattici

Teorema 5.29:
Data una CFG $G = (V, T, P, S)$,
una stringa $w \in T^*$ ha due distinti alberi sintattici se e solo se
w ha due distinte derivazioni a sinistra da S

Ambiguita' inerente

Un CFL L e' **inerentemente ambiguo** se **tutte** le grammatiche per L sono ambigue

Esercizi

- Esercizio:
  La CFG con produzioni $S \rightarrow aS|aSbS|\epsilon$ e' ambigua?
  Provarlo formalmente.
  Se la CGF sopra e' ambigua, trovare una CFG non ambigua per il linguaggio da essa generato.

- Esercizio (II compitino 2013):
  Dimostrare con un esempio che la grammatica con le seguenti produzioni è ambigua (suggerimento: è sufficiente una stringa di lunghezza 4).

$$S \rightarrow aSbS|bSaS|\epsilon$$

Linguaggi regolari e grammatiche

- Un linguaggio regolare e' anche libero da contesto
- Da una espressione regolare
  si puo' ottenere una grammatica che genera lo stesso linguaggio
- Da un automa a stati finiti,
  si puo' ottenere una grammatica che genera lo stesso linguaggio

Da espressione regolare a grammatica

Per induzione sulla struttura della espressione regolare:

- se $E = a$, allora produzione $S \to a$
- se $E = \epsilon$, allora produzione $S \to \epsilon$
- se $E = F + G$, allora produzione $S \to F \mid G$
- se $E = FG$, allora produzione $S \to FG$
- se $E = F^*$, allora produzione $S \to FS \mid \epsilon$

Esempio

Espressione regolare: $0^*1(0+1)^*$
Grammatica:

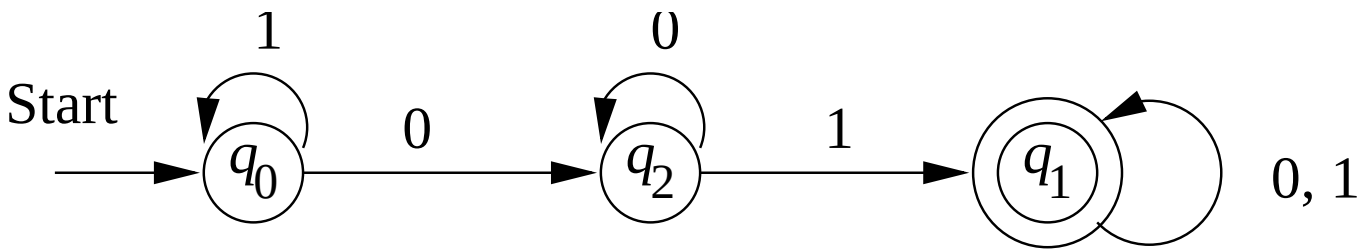
$$S \to ABC$$
$$A \to 0A \mid \epsilon$$
$$B \to 1$$
$$C \to DC \mid \epsilon$$
$$D \to 0 \mid 1$$

Da automa a grammatica

- Una variabile per ogni stato
- Simbolo iniziale = stato iniziale
- Per ogni transizione da stato s a stato p con simbolo a ($delta(s, a) = p$), produzione $S \to aP$
- Se p stato finale, allora produzione $P \to \epsilon$

Esempio

Automa:



Grammatica:

$$Q_0 \to 1Q_0 \mid 0Q_2$$
$$Q_2 \to 0Q_2 \mid 1Q_1$$
$$Q_1 \to 0Q_1 \mid 1Q_1 \mid \epsilon$$

La stringa 1101 e' accettata dall'automa. Nella grammatica, ha la derivazione:

$$Q_0 \Rightarrow 1Q_0 \Rightarrow 11Q_0 \Rightarrow 110Q_2 \Rightarrow 1101Q_1 \Rightarrow 1101$$